

Vollständigkeitsaxiom $\implies$

$\exists$ ein eindeutiges $y \in \mathbb{R}$ mit $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$

Zu zeigen:

$$\boxed{y^k = x} \quad (*)$$

entfällt! (weiter auf p. 10.3 oben)

ad $(*)$: Sei $J_n := [a_n^k, b_n^k]$

für $n \in \mathbb{N}$. $\boxed{\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist IS}}$

Eigenschaft i):

$$\boxed{J_{n+1} \subset J_n} \quad \text{klar,}$$

da z.B. aus $a_n \leq a_{n+1}$ ~~folgt~~



folgt $a_n^k \leq a_{n+1}^k$

Eigenschaft ii): Es gilt

$$|J_n| = b_n^k - a_n^k \quad \stackrel{!}{=} \quad$$

$$(b_n - a_n) \left[b_n^{k-1} + a_n b_n^{k-2} + \dots + a_n^{k-2} b_n + a_n^{k-1} \right]$$

$$\leq (b_n - a_n) k b_n^{k-1},$$

denn [...] enthält k Summanden $\leq b_n^{k-1}$.

Gemäß $b_n \leq b_1 \leq 1+x$ folgt

$$|J_n| \leq (b_n - a_n) k (1+x)^{k-1}.$$

Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so findet man ein

$n \in \mathbb{N}$ mit

-102-

$$|I_n| = b_n - a_n < \frac{\varepsilon}{k(1+x)^{k-1}}$$

$$\Rightarrow |J_n| < \varepsilon$$

Also ist $\{J_n\}$ eine I.S.

Nun beachte: $y \in I_n = [a_n, b_n] \Rightarrow$

$$y^k \in [a_n^k, b_n^k] \quad (\text{wegen } a_n)$$

$$\text{also: } y^k \in J_n \quad \forall n$$

Aus (1)_n folgt: $x \in J_n \quad \forall n$

$$\text{Zusammen: } x, y^k \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \Rightarrow (*)$$



Beobachtung: gemäß Konstruktion
ist die Menge $M := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

z.B. nach oben durch $1+x$ beschränkt,
die optimale obere Schranke ist $\sqrt[k]{x}$.

Def 3.4 : $M \subset \mathbb{R}$ heißt nach oben
(unten) beschränkt : $\iff$

$\exists \rho \in \mathbb{R} : m \leq \rho \quad (\rho \leq m)$
für alle $m \in M$

Bem : 1.) Es muss keine Schranken
geben (z.B. $M = \mathbb{R}$) und falls
doch, so müssen diese nicht in M
liegen (etwa $M := (0, 1)$ mit

unterer Schranke 0)

-104-

2.) ρ obere Schranke von $M \implies$

$\rho' > \rho$ ebenfalls,

3.) Axiom von Archimedes $\Rightarrow$ $\mathbb{N}$ unbeschränkt

(von $\sup$ und $\inf$)

Def 3.5: Sei $M \subset \mathbb{R}$ nach oben

beschränkt. Eine Zahl $\rho \in \mathbb{R}$

heißt Supremum von M , falls:

(1.) ρ ist obere Schranke von M

(2.) ρ' eine weitere obere Schranke
 $\implies \rho' \geq \rho$

Schreibweise:

$$\rho = \sup M$$

anschaulich:

$\sup M$ ist kleinste
obere Schranke von M

Bem: 1.) Definiere selbst für
nach unten beschränkte M die
größte untere Schranke $\boxed{\inf M}$.

2.) Zeige: für ^{alle} Intervall I mit
Endpunkten $a < b$ ist

$$\boxed{a = \inf I, b = \sup I}$$

3.) $\inf \mathbb{N} = 1$, $\sup \mathbb{N}$ existiert nicht.

4.) falls $\sup M \in M$: $\sup M$ heißt
dann Maximum, i. Z. $\boxed{\max M}$



analog: $\min M$

Trivialerweise gilt

Satz 3.6 : Sei $M \subset \mathbb{Z}$ nicht leer.

Ist M nach oben (unten) beschränkt,
so existiert $\boxed{\sup M \in M}$ ($\inf M \in M$).

(vgl. etwa Satz 2.1)

Wie steht es in $\mathbb{R}$ um die Existenz
von sup und inf ?

Satz 3.7: (Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$)

$\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ nach oben (unten) beschränkt
 $\implies M$ hat ein Supremum (Infimum)

IV. Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Axiom: $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ für jede IS

$\Downarrow$
 $\exists$ von $\sqrt{}$.

$\Downarrow$
 $\exists$ von $\sup/\inf$

Satz 3.7 :

$\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ nach oben (unten) beschränkt
 $\Rightarrow \sup M$ ($\inf M$) existiert

Bem: 1.) Satz 3.7 ist äquivalent zum Vollständigkeitsaxiom. D.h.: Setzt man Satz 3.7 als gültig voraus, so kann man das Axiom beweisen. (Übung)

2.) $\forall$ In I-IV stehen keine
richtigen Axiome. Konstruiert man $\mathbb{R}$
 mengentheoretisch, so sind I-IV
beweisbar.

3.) Durch I-IV wird $\mathbb{R}$ allerdings
 bis auf ordnungserhaltende ~~Isomorphismen~~
~~Isomorphismen~~ ^{Isomorphismen}
 eindeutig festgelegt.

Beweis von Satz 3.7: Sei $M \subset \mathbb{R}$ nach
oben beschränkt. Definiere rekursiv

$$I_n := [a_n, b_n], \quad n \in \mathbb{N},$$

wie folgt:

$$a_1 := a - 1 \quad \text{für ein beliebiges} \\ a \in M$$

(beachte: $M \neq \emptyset$)

$b_1 :=$ eine obere Schranke
von M .

-109-

Seien $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ konstruiert
mit $\overbrace{[a_n, b_n]} =: I_n$

- mit
- (1)_l a_l keine obere Schranke von M
 - (2)_l b_l obere Schranke von M
 - (3)_l $I_l \subset I_{l-1}$
 - (4)_l $|I_l| \leq \frac{1}{2} |I_{l-1}|$
- } $\begin{matrix} n & n \\ \text{für} \\ \text{für} \\ l=1 \end{matrix}$

für $l = 1, \dots, n$.

beachte:

(1)₁, (2)₁ ✓

Dann sei I_{n+1} wie folgt definiert:
Setze $X := \frac{1}{2} (a_n + b_n)$ (Mitte von I_n)

-110-

(„Man nimmt nicht immer
den Mittelpunkt des vorhergehenden Teils!“)

Fall 1 : x obere Schranke von M

$$\leadsto I_{n+1} := [a_n, x]$$

Fall 2 : x keine obere Schranke von M

$$\leadsto I_{n+1} := [x, b_n]$$

Dann: $(1)_n - (4)_n$ richtig $\forall n$

$\Rightarrow \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist IS

Voll-
 $\Rightarrow$

ständigkeit

$$\underline{\exists \rho \in \mathbb{R} \text{ mit } \rho \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n}$$

Man zeigt:

a) ρ obere Schranke von M :

falls nicht : $\exists y \in \underline{M}$ mit $y > \rho$;

wähle n groß genug mit

$$|I_n| = b_n - a_n < y - \rho;$$

wegen $\rho \in I_n$ folgt :

$$b_n - \rho \leq b_n - a_n < y - \rho,$$

also: $b_n < y$. b_n ist aber obere
Schranke, Wspr. !

b) ρ kleinste obere Schranke :

falls nicht : $\exists$ obere Schranke $\tilde{\rho} < \rho$

wähle n so groß, dass

$$|I_n| = b_n - a_n < \rho - \tilde{\rho}$$

wegen $\rho \in I_n$ folgt:

$$\rho - a_n \leq b_n - a_n < \rho - \tilde{\rho}$$

$$\Rightarrow a_n > \tilde{\rho}$$

$\Rightarrow a_n$ obere Schranke von M ,

Widerspruch zu $(1)_n$.

Aus a), b) folgt per Def: $\rho = \sup M$

□

Wir schließen mit einer Folgerung aus Archimedes (IV. wird nicht benutzt), die feststellt, dass „ $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt“.

Satz 3.8: Seien $x < y$ aus $\mathbb{R}$. -113-

! Dann ist $\mathbb{Q} \cap (x, y) \neq \emptyset$.

Anwendung: Zu $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ bilde
das Intervall $(x, x + \frac{1}{n}) \xRightarrow{\text{Satz 3.8}}$

$\exists q_n \in \mathbb{Q} \cap (x, x + \frac{1}{n})$, also:

$$\boxed{|x - q_n| < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

Die rationale Folge $\{q_n\}$ approximiert
 $x \in \mathbb{R}$ beliebig gut („ $n \rightarrow \infty$ “).

Beweis: Archimedes $\implies$

$$\exists n \in \mathbb{N}: n > \frac{1}{y-x}$$

Mit diesem n sei

$$A := \{m \in \mathbb{Z} : m - nx > 0\}$$

-114-

A nach unten beschränkt $\xRightarrow{\text{Satz 3.6}}$

$$\exists m_0 = \min A \quad (\underline{\underline{m_0}} \in A!)$$

Nun beachte: $m_0 \in A \Rightarrow x < \frac{m_0}{n} = \frac{m_0 - 1}{n} + \frac{1}{n}$
und

$$m_0 - 1 \notin A \Rightarrow (m_0 - 1) - nx \leq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{m_0 - 1}{n} \leq x$$

Es folgt zusammen:

$$x < \frac{m_0}{n} \leq x + \frac{1}{n} < x + y - x = y$$

Wahl von n

Insgesamt:

~~Es folgt zusammen:~~

$$\frac{m_0}{n} \in (x, y).$$



-115-

Ergänzung: Größenvergleich von Mengen

(Konzept der Mächtigkeit; vgl. Halmos)

U

Def 3.6: Seien A, B Mengen.

1.) A heißt abzählbar: $\Leftrightarrow$

$\exists$ Bijektion $f: \mathbb{N} \rightarrow A$

2.) höchstens abzählbar: $\Leftrightarrow$

$A = \emptyset$ oder A endlich oder abzählbar

3.) A und B sind gleichmächtig

: $\Leftrightarrow \exists$ Bijektion $\Phi: A \rightarrow B$

Damit gilt

Satz 3.9: i) A abzählbar, $B \subset A$

$\Rightarrow B$ höchstens abzählbar

ii)

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind
gleichmächtig

man kann also die rationalen
Zahlen „abzählen“.

iii) Die Vereinigung von abzählbar
vielen abzählbaren Mengen ist
selbst abzählbar.

iv)



$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.



Bem: 1.) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sind von derselben
(niedrigsten) Unendlichkeitsstufe.

2.) Gemäß iv) heißt $\mathbb{R}$ überabzählbar.

3.) Notation für Mengen A, B :

-117-

$$\boxed{A \lesssim B} \quad (A \text{ höchstens so mächtig wie } B)$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \exists \text{ injektive Abb. } \Phi: A \rightarrow B \\ & (\Leftrightarrow \exists \text{ surjektive Abb. } \Psi: B \rightarrow A); \end{aligned}$$

$$\boxed{A < B} \quad (B \text{ mächtiger als } A)$$

$$\Leftrightarrow A \lesssim B \text{ und } A, B \text{ nicht gleichmächtig}$$

Damit ~~ergibt~~ ^{ergibt ii) und} _{iv)}:

$$\boxed{\mathbb{Q} < \mathbb{R}} \quad \nabla$$

4.) Man kann zeigen:

$$\nabla \quad \boxed{\mathcal{P}(\mathbb{N}) \text{ gleichmächtig zu } \mathbb{R}} \quad \nabla$$

($\mathcal{P}(\mathbb{N}) :=$ Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$)

[Querverweis :

"Axiomatik" konstruiert $\mathbb{N}$ und damit auch $\mathcal{P}(\mathbb{N})$; die Potenzmenge kann dann als Modell für $\mathbb{R}$ gewählt werden]

Es ist also

$$\mathbb{N} < \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

Frage:

$\exists$ eine Menge A mit
 $\mathbb{N} < A < \mathcal{P}(\mathbb{N})$?

1938 Gödel, 1963 Cohen :

Die Frage lässt sich mit den bisherigen Axiomen nicht beantworten.

Vor Gödel und Cohen hat

man die

Kontinuums~~hypothese~~:

(K)

$\exists$ keine Menge
A mit
 $\aleph < A < \mathcal{P}(\aleph)$

formuliert und versucht, diese aus den
Axiomen $\boxed{AX}$ der Mengenlehre abzuleiten.

Gödel und Cohen zeigten:

- $\boxed{AX}$ und $\boxed{K}$ sind unabhängig

- man kann $\boxed{AX}$ um $\boxed{K}$ oder
 $\boxed{\neg K}$ ergänzen, die bisher er-
zielten Aussagen bleiben gleich.